$\cancel{v' = pv + h}$ 1) $\ln|v| = \int p + c$, **Часть 2**

$v = e^{\int p} c$

$\cancel{v' = e^{\int p}(pc + c') \Rightarrow 2) \; e^{\int p}(pc + c') = e^{\int p} cp + h}$

2) $c' = \frac{h}{e^{\int p}}$

2) $c = \int \frac{h}{e^{\int p}} + c_1$

2) $v = c_1 e^{\int p} + e^{\int p} \int \frac{h}{e^{\int p}}$

## Б.1

З. Коши:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y), \; f\text{-непр. в } Q: \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \qquad \{ t_0 - T \le t \le t_0 + T, \; A \le y \le B \}$$

Реш. З. Коши: непр. диф. ф. $y$ т.ч. (1), (2) и $A \le y \le B$ при $t \in$ $|t - t_0| \le T$

Т.1 Пусть: 1) $f_1, f_2$ непр. в $Q$

2) $f_1 \in L(Q)$ по $y \Rightarrow \exists L > 0: |f_1(t, y) - f_1(t, \tilde{y})| \le L|y - \tilde{y}|, \; \forall (t, y), (t, \tilde{y}) \in Q$

3) $y_1, y_2$ – р. з. Коши на $[t_0 - T, t_0 + T] \equiv \tilde{T}$

---

① $\max\limits_{t \in [t_0 - T, t_0 + T]} |y_1(t) - y_2(t)| \le (|y_{01} - y_{02}| + T \max\limits_{(t,y) \in Q} |f_1 - f_2|) e^{L|t - t_0|}$

◄ 3) $\Rightarrow y_1 = y_{01} + \int\limits_{t_0}^{t} f_1(\tau, y(\tau)) d\tau, \; t \in \tilde{T} \Rightarrow |y_1 - y_2| \le |y_{01} - y_{02}| + \left| \int\limits_{t_0}^{t} [f_1(y_1, \tau) - f_1(y_2, \tau)] \right| +$

$y_2 = \ldots$

$+ \left| \int\limits_{t_0}^{t} |f_1(y_2, \tau) - f_2(y_2, \tau)| \right|, \; t \in \tilde{T}.$

Л.Г.Б. $\Rightarrow |y_1 - y_2| \le (|y_{01} - y_{02}| + T \max\limits_{(t,y) \in Q} |f_1 - f_2|) e^{L|t - t_0|}$ ►

Т.2 (Т. срав-ния) Пусть: 1) $Q_+ := \{(t,y):\ t_0 \le t \le t_0+T,\ A \le y \le B\}$

2) $f_1 \in C(Q_+)$ и $\exists f_{1y}(t,y) \in C(Q_+)$

3) $f_2 \in C(Q_+)$

4) $y_1, y_2$ — р.з. Коши на $\tilde{T}_+$

5) $f_1 \ge f_2 \quad (t,y) \in Q_+,\ y_{01} \ge y_{02}$

---

⇒ $y_1 \ge y_2,\ t \in \tilde{T}_+$

◀ $y_1' - y_2' = \underbrace{f_1(t,y_1) - f_1(t,y_2)}_{\int_0^1 f_{1y}(t,\, y_2+\theta(y_1-y_2))\,d\theta\,(y_1-y_2)} + f_1(t,y_2) - f_2(t,y_2) \Rightarrow v' = pv + h$

$\Rightarrow v = (y_{01}-y_{02})\, e^{\int_{t_0}^t p(\tau)d\tau} + \int_{t_0}^t e^{\int_\tau^t p(\xi)d\xi} h(\tau)\,d\tau,\ t \in \tilde{T}_+$

Из 5) $v(t) \ge 0,\ t \in \tilde{T}_+$ ▶

---

Б.2 Т.1 Пусть! 1) $Q_\mu := \{(t,y,\mu):\ |t-t_0| \le T,\ A \le y \le B,\ \mu_1 \le \mu \le \mu_2\}$

2) $f \in C(Q_\mu),\ \underline{L_y(Q_\mu)} \Rightarrow |f(t,y_1,\mu) - f(t,y_2,\mu)| \le L_0 |y_1 - y_2| \quad \forall (t,y_{1,2},\mu) \in Q_\mu$

3) $y_0 \in C([\mu_1,\mu_2])$

4) $y(t,\mu)$ — р.з. Коши на $\tilde{T}$ $\forall \mu \in [\mu_1,\mu_2]$

---

⇒ $y(t,\mu) \in C_\mu([\mu_1,\mu_2], \tilde{T})$

◀ $\exists \mu_0, \mu_0+\Delta\mu \in [\mu_1,\mu_2] \overset{\text{Т.о непр. з. р. з. К.}}{\Rightarrow} \max_{t\in\tilde{T}} |y(t,\mu_0) - y(t,\mu_0+\Delta\mu)| \le (|y_0(\mu_0) - y_0(\mu_0+\Delta\mu)| + T \max_{(t,y)\in Q} |f(t,\mu_0,y) - f(t,y,\mu_0+\Delta\mu)|) \cdot \exp\{L_0 T\}$

Р.н. $y_0(\mu)$, $f(t,y,\mu)$, $|\Delta\mu| \le \delta_1(\varepsilon)$, $|\Delta\mu| \le \delta_2(\varepsilon)$ ⇒ — ▶

---

Б.3 Т.1 ~~Пусть~~ Пусть: 1) $f(t,y,\mu) \in C(Q_\mu),\ \in C^1_{y,\mu}(Q_\mu)$

2) $y_0(\mu) \in C^1([\mu_1,\mu_2])$

3) $y$ — р.з. Коши на $\tilde{T}$ $\forall \mu \in [\mu_1,\mu_2]$

---

⇒ $y(t,\mu)$ дифф. по $\mu$ $\forall t \in \tilde{T},\ \forall \mu \in [\mu_1,\mu_2]$

◀ $v(t,\mu,\Delta\mu) = \frac{y(t,\mu+\Delta\mu) - y(t,\mu)}{\Delta\mu},\ t \in \tilde{T}$, $v' = pv + q$, $v(t,\mu,\Delta\mu) = \frac{y_0(\mu+\Delta\mu) - y_0(\mu)}{\Delta\mu} e^{\int_{t_0}^t p(\xi,\mu,\Delta\mu)d\xi} + \int_{t_0}^t q(\tau,\mu,\Delta\mu)\, e^{\int_\tau^t p(\xi,\mu,\Delta\mu)d\xi} d\tau,\ t \in \tilde{T}$.

дифф. ⇔ $\exists \lim_{\Delta\mu\to 0} v$

$\left.\begin{array}{l} y_0(\mu) \in C^1 \\ f_y \in C(Q_\mu) \\ f_\mu \in C(Q_\mu) \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{\Delta\mu\to0} v(t,\mu,\Delta\mu) = \frac{dy_0}{d\mu}(\mu) \exp\{\int_{t_0}^t f_y(\xi, y(\xi,\mu),\mu)d\xi\} + \int_{t_0}^t f_\mu(\tau, y(\tau,\mu),\mu) \exp\{\int_\tau^t f_y(\ldots)d\xi\} d\tau$

Бил. 4

Рассм. норм. сист. одн. диф. ур. ~~с пост. коэф.~~

$\frac{d\bar{y}(t)}{dt} = \bar{f}(t, \bar{y}(t))$ — непр. дифф. по всем $y_i$, $t \geq 0$

$\bar{y}(t_0) = \bar{y}_0$ $\quad \bar{y} \in \mathbb{R}$

Опр. Реш. $\bar{y}(t, \bar{y}_0)$ — уст. по Ляп., если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_1 > 0 : \forall \|y_0 - \bar{y}_0\| < \delta_1 \Rightarrow \|y(t, y_0) - y(t, \bar{y}_0)\| < \varepsilon, \quad t \geq t_0$$

Опр. Асимпт. уст. $\Leftrightarrow$ уст. по Ляпунову и $\exists \delta_2$ $\lim\limits_{t\to\infty} \| \quad \| = 0$

Опр. Экв. уст. нул. реш.: $\bar{x}(t) = \bar{y}(t) - \bar{y}(t, \bar{y}_0)$

$$\Rightarrow \frac{d\bar{x}(t)}{dt} = \underbrace{f(t, \bar{y})}_{f(t, \bar{x}(t) + \bar{y}(t, \bar{y}_0))} - f(t, \bar{y}(t, \bar{y}_0))$$

$\Rightarrow \bar{x}(t) \equiv 0$ — реш. сист. при начальн. условии $x(0) = 0$

$\Rightarrow$ ау вышенап. $\Rightarrow$ экв. - устойч.

Л1 (асимпт. уст. л.о. с.оду с пост. коэф.) Пусть:

1) $B(t)$ — ф.м. (функц.)
2) $|B_{ij}(t)| \leq b(t)$
3) $\bar{y}(t) = B(t)\bar{x}(t)$

---

① $\|\bar{y}(t)\| \leq n\, b(t) \|\bar{x}(t)\|$

▲ $|y_i| = \sum\limits_{k=1}^{n} |b_{ik}||x_k| \leq b \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k| \leq b \left(\sum\limits_{k=1}^{n} 1^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq b\sqrt{n}\|x\|$

$\Rightarrow \sum\limits_i |y_i|^2 \leq b^2 n^2 \|x\|^2 \Rightarrow \|y\| \leq n\, b\|x\|$ ■

Л2 Пусть

1) $\bar{y}(t)$ — непр., $t \geq 0$

---

② $\left\| \int_0^t y(\tau)d\tau \right\| \leq \sqrt{n} \int_0^t \|y(\tau)\| d\tau$, $t \geq 0$

▲ $|I_i| = \left| \int_0^t y_i(\tau) d\tau \right| \leq \int_0^t |y_i(\tau)| d\tau \leq \int_0^t \|y(\tau)\| d\tau \Rightarrow \|I\| \leq \sqrt{n} \int_0^t \|y(\tau)\| d\tau$ ■

Билет

Л.3 Пусть!
1) $Z(t,\tau) = Y^{-1}(t)Y(\tau)$, $Y(\tau)$ – ф. м. реш. ~~нормальная~~ $\frac{d\bar{y}}{dt} = A\bar{y}(t)$, $\underset{\mathbb{R}^{n\times n}}{A}$
2) $p = \max_i \operatorname{Re} \lambda_i$

① $Z(t,\tau) = Z(t-\tau, 0)$
② $\forall \gamma>0 \ \exists C_\gamma>0: |Z_{ij}(t,\tau)| \le C_\gamma e^{(p+\gamma)(t-\tau)} \ \forall t \ge \tau$

◄ ① $s = t-\tau$, $Z$ – реш. з. Коши: $\frac{dZ(t,\tau)}{dt} = AZ(t,\tau)$, $Z(\tau,\tau) = E$;

$\tilde{Z}(s) = \underset{\text{фикс.}}{Z(\tau+s,\tau)}$ $\Rightarrow$ $\frac{d\tilde{Z}(s)}{ds} = A\tilde{Z}(s)$, $\tilde{Z}(0) = E$ $\overset{\text{ед. реш. з.к.}}{\Rightarrow}$ $\tilde{Z}(s) = Z(s,0)$

или $Z(t,\tau) = Z(t-\tau, 0)$

② $Z(s,0) = Y(s)Y^{-1}(0)$ $\Rightarrow$ $Z_{ij}(s,0) = q_{ij}\exp\{\lambda_k s\}$, $\deg q_{ij} \le n-1$ $\Rightarrow$ $|q_{ij}| \le C_{ij}\exp\{\gamma s\}$, $s \ge 0$ $\forall \gamma>0 \ \exists C_{ij}>0$

столбцы соответ. из б. ф. ф.с.р.

$|\exp\{\lambda_k s\}| \le \exp\{ps\}$ $\Rightarrow$ ►

Т. Пусть!
1) $p = \max_i \operatorname{Re}\lambda_i < 0$

① $\bar{y}(t, \underset{\bar{y}_0}{\bar{y}_0}) \equiv 0$ асимп. уст.

◄ Рассм. $\bar{y}_0 \ne 0$ $\Rightarrow$ $\bar{y}(t,\bar{y}_0) = Z(t,0)\bar{y}_0$, $\exists \underbrace{p+\gamma}_{\alpha} < 0$ $\overset{\wedge}{\Rightarrow}$ $\|\bar{y}(t,\bar{y}_0)\| \le nC_\gamma e^{\alpha t}\|\bar{y}_0\| \le$
$\le nC_\gamma\|\bar{y}_0\|$

$\Rightarrow \delta = \frac{\varepsilon}{nC_\gamma} \Rightarrow \|\bar{y}_0\| < \delta$, $\|\bar{y}(t,\bar{y}_0)\| < \varepsilon \ \forall t \ge 0$

Т.к. $t\to\infty$ $\|\bar{y}(t,\bar{y}_0)\| \to 0$ $\Rightarrow$ ►

---

Б.5

Т. Пусть!
1) $\operatorname{Re}\lambda_i \le 0$, если $\operatorname{Re}\lambda_i = 0$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ кр. $\lambda_i$ = разм. собств. подпр.
2) $\exists \operatorname{Re}\lambda_j = 0$

① нул. реш. уст. по Ляп., но не асимпт.

◄ $\bar{y}(t,y_0) = \underset{\text{матрицант}}{Z(t,0)}\cdot y_0$, т.к. для $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$ $|Y_{ji}(t)| \le C_{ij}$, $t \ge 0$ и для $\operatorname{Re}\lambda_i = 0$

$q_{ji}\exp\{\lambda t\}$
$\sim \deg \le n-1$

$|Y_{ji}(t)| < |h_{ji}|\cdot|\exp\{iqt\}| \le \tilde{C}_{ji}$ $\Rightarrow$ $|Z_{ij}(t,0)| < C_{ij}$, $i,j = 1,\dots,n$ $\Rightarrow$ $\|y(t,y_0)\| < \max C_{ij} \|y_0\| \cdot n$
$\Rightarrow$ уст.

Пусть $\underset{\|h\|=1}{h}$ – с.в. для $\lambda = iq$ $\Rightarrow$ $\delta_0 h\exp\{iqt\}$ – р. и $\delta_0 0{,}5\operatorname{Re} h\exp\{iqt\}$ тоже как $\operatorname{Re}$ часть

Тогда $\|\underset{0}{y(t,y_0)}\| = 0{,}5\delta_0$, но при $t = \frac{2\pi k}{q}$, $k\to\infty$ $\|y(t_k)\| = 0{,}5\delta_0 \ne 0$ ►

**Б.5 Т.** Пусть: 1) $\exists \lambda_i : \mathrm{Re}\,\lambda_i > 0$

или

2) $\exists \lambda_i : \mathrm{Re}\,\lambda_i = 0$ и разм. собств. подпр. < кр. $\lambda_i$

---

① нул. реш. неуст.

◀ $\exists \lambda_i : \mathrm{Re}\,\lambda_i > 0$, $\lambda_i = p + iq$ ⇒ $\bar{y}(t) = 0{,}5\delta_0 \mathrm{Re}\,\bar{h}\exp\{(p+iq)t\}$ - реш. $= 0{,}5\delta_0 \exp\{pt\}[\cos qt \cdot \bar{h}_{re} - \sin qt \cdot \bar{h}_{im}]$, $\bar{h} = \bar{h}_{re} + i\bar{h}_{im}$

$\|y(t_0)\| = 0{,}5\delta_0$, $t_k = \frac{2\pi k}{q}$ $\|y(t_k)\| \to +\infty$, $k \to +\infty$

$\exists \mathrm{Re}\,\lambda_i = 0$ и $\dim \ker(A - \lambda E) <$ кр. $\lambda_i$ ⇒ $\bar{y}(t) = 0{,}5\delta_0 \mathrm{Re}(\bar{g} + t\bar{h})\exp\{iqt\}$ - реш.

$\|y(t_0)\| = 0{,}5\delta_0 \mathrm{Re}\,\bar{g}$, $t_k = \frac{2\pi k}{q}$ $\|y(t_k)\| \to +\infty$. ▶

---

**Б.6 Т.** Пусть: 1) $f_j(\bar{y})$ дважд. непр. дифф. в окр. $(0, \ldots, 0)$

---

① Если $\mathrm{Re}\,\lambda_k < 0$ уст. $A = (\partial f_i(0 \ldots 0)/\partial y_j)$

Если $\exists \mathrm{Re}\,\lambda_k > 0$ неуст.

---

**Б.7 Опр** $V(\bar{y}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ - пол. опр. на $\Omega$ $(\bar{0} \in \Omega)$ $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ 1) $V(\bar{y}) \geq 0$, $\bar{y} \in \Omega$
2) $V(\bar{y}) = 0 \Leftrightarrow \bar{y} = \bar{\theta}$

**Л.1** Пусть: 1) $V(\bar{y})$ пол. опр. на $\Omega$ 2) непр. $V(\bar{y})$

---

① $\forall \varepsilon_1 > 0$ $\exists \varepsilon_2 > 0$ : $\|\bar{y}\| \geq \varepsilon_1 \Rightarrow V(\bar{y}) \geq \varepsilon_2$, $\bar{y} \in \Omega$

② $\forall \varepsilon_2 > 0$ $\exists \varepsilon_3 > 0$ : $V(\bar{y}) \geq \varepsilon_2 \Rightarrow \|\bar{y}\| \geq \varepsilon_3$, $\bar{y} \in \Omega$

◀ ① От противного. ⇒ $\exists \varepsilon_1 > 0$ $\forall \varepsilon_2 > 0$ $\exists \bar{y} : \|y\| \in \Omega$ $\wedge$ $\|\bar{y}\| \geq \varepsilon_1 \Rightarrow V(\bar{y}) < \varepsilon_2$, $\bar{y}_k : V(\bar{y}_k) \to 0$ $(\varepsilon_{2k})$ $\overset{\text{огр. множ-во}}{\Rightarrow}$ $\exists \bar{y}_{k_m} \to \tilde{y}$, $\overset{\text{непр.}}{\Rightarrow}$

$V(\bar{y}_{k_m}) \to V(\tilde{y}) = 0 \overset{\text{пол. опр.}}{\Rightarrow} \tilde{y} = \bar{\theta} \Rightarrow \perp$

② От противного: $\exists \varepsilon_2 > 0$ $\forall \varepsilon_3 > 0$ $\exists \bar{y} \in \Omega$ $V(\bar{y}) \geq \varepsilon_2 \Rightarrow \|y\| \leq \varepsilon_3$, $\bar{y}_k : \|y_k\| \to 0 \overset{\text{непр.}}{\Rightarrow} V(\bar{y}_k) \to V(0) = 0$ $\perp$. ▶

**Сл-е** Пусть: 1) Вып. усл. Л1
2) $\bar{y}_k \in \Omega$

---

① $\bar{y}_k \to 0 \Leftrightarrow V(\bar{y}_k) \to 0$, $k \to \infty$

② $\bar{y}(t) \to \bar{\theta} \Leftrightarrow V(\bar{y}(t)) \to 0$, $t \to \infty$, $t \geq 0$, $\bar{y}(t) \in \Omega$

Рассм. задачу Коши для н. сист.: $\frac{d\bar{y}}{dt} = f(t, \bar{y}(t))$, $\bar{y}(0) = y_0 \in \Omega$,
опр. и непр. на $[0, \infty) \times \Omega$
$f_i(t, \bar{0}) = 0$, $i = \overline{1,n}$, $t \geq 0$

**Опр** Пусть: $V(\bar{y})$: 1) $\in C^1(\Omega)$
2) пол. опр. на $\Omega$
3) $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(\bar{y})}{\partial y_i} f_i(t, \bar{y}) \leq 0$, $\forall \bar{y} \in \Omega$, $t \geq 0$

---

① $V(\bar{y})$ - ф. Ляпунова.

Б.9 В постановке з. Коши для диф. ур. n порядка, разреш. относит. старш. произв. задаются n начальных значений, существуют и другие способы: задание значений нез. переменной:

$$\begin{cases} y''(t) = F(y,y',t), & t_0 \le t \le t_1 \\ y(t_0) = y_0 \\ y(t_1) = y_1 \end{cases}$$ или $$\begin{cases} \frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u = -f(x), & 0 \le x \le l \\ u(0) = u_0 \\ u'(l) = 0 \end{cases}$$

В общем случае, краевой задачей для ДУ n-го пор., разр. отн-но ст. пр., рассм. на $[0,l]$ наз-ся задача, в которой значение $y(x), y'(x)$, или их лин. комб. задаются как в $x=0$, так и в $x=l$.

В общем случае может не иметь реш., единств. или беск. много $\overline{y^{(n)}(x)}$.

Рассм. кр. задачу:

$$\begin{cases} a_0(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_2(x)y = f(x), & 0 \le x \le l \\ \alpha_1 y'(0) + \beta_1 y(0) = u_0 \\ \alpha_2 y'(l) + \beta_2 y(l) = u_1 \end{cases}$$

1) $a_0(x) \ne 0$ на $[0,l]$

2) $a_0, a_1, a_2, f(x)$ непр. на $[0,l]$

3) $\alpha_1^2 + \beta_1^2 \ne 0$, $\alpha_2^2 + \beta_2^2 \ne 0$

$$p(x) = \exp\left(\int_0^x \frac{a_1(s)}{a_0(s)}ds\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) - q(x)y = f_2(x), \quad q(x) = -\frac{p(x)a_2(x)}{a_0(x)}, \quad f_2(x) = \frac{p(x)f_1(x)}{a_0(x)}$$

$\exists\, y(x) = z(x) + v(x)$

$v(x)$ — удовл. краев. усл. Неодн. $\in C^2[0,l]$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dz}{dx}\right) - q(x)z(x) = f(x), & 0 \le x \le l \\ \alpha_i z'(0) + \beta_i z(0) = 0 \end{cases}$$

$$f(x) = f_2(x) - \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dv}{dx}\right) + q(x)v$$

$\Rightarrow$ Свели неодн. задачу к однородной.

---

Б.10

$\exists\, y(x), z(x) \in C^2([0,l]) \Rightarrow$ корректны $Ly$ и $Lz$, где $Ly = \frac{d}{dx}\left(p \cdot \frac{dy}{dx}\right) - qy$

Рассм. $zLy - yLz = z\left(\frac{d}{dx}(py') - qy\right) - y\left((pz')' - qz\right) = z(py')' - \cancel{qyz} - y(pz')' + \cancel{qyz} = zp'y' + zpy'' - yp'z' - ypz'' = (p(zy' - yz'))'$ $\Rightarrow$ $zLy - yLz = \frac{d}{dx}\left(p\left(z\frac{dy}{dx} - y\frac{dz}{dx}\right)\right)$ — тожд. Лагранжа.

$\Rightarrow W[y_1,y_2] = y_1 y_2' - y_2 y_1' = \frac{p(x)}{c}$, $0 \le x \le l$, $c = \mathrm{const}$.

Фор-ла Грина: $\int_0^l zLy - yLz = p(x)(z(x)y'(x) - y(x)z'(x))\Big|_0^l$

Утв. Пусть: 1) $y, z$ удовл. одним и тем же усл. кр.

$\Rightarrow$ $\int_0^l zLy - yLz = 0$

$\Leftarrow$ $z(0)y'(0) - y(0)z'(0) = 0$, $\exists\, \alpha_1 = 0 \Rightarrow y(0) = 0$, $z(0) = 0$, $\exists\, \alpha_1 \ne 0 \Rightarrow \alpha_1 z'(0) + \beta_1 z(0) = 0 \;|\,(-y(0))$

$\alpha_1 y'(0) + \beta_1 y(0) = 0 \;|\,(z(0))$ $\Rightarrow$

Т1. Пусть: 1) на $\Omega$ $\exists V(\bar y)$ – ф. Лен.

---

① $\bar y(t) \equiv \bar\theta$ – уст. реш. автон. сист. по Ляпун.

◄ $\exists \bar y_0$ : $\|y_0\|<\delta \overset{\text{непр}}{\Rightarrow} \|y(t,y_0)\| \le \delta \le \varepsilon_1$, $t\in[0,t_1)$, $\exists\ \|\bar y(t_1)\| \ge \varepsilon_1 \overset{\wedge}{\Rightarrow} V(\bar y(t_1)) \ge \varepsilon_2$

$\bar y_0 = \bar y(0)$, $V(\bar y(0)) \le \frac{\varepsilon_2}{2}$

$\Rightarrow V(\bar y(t_1)) - V(\bar y(0)) \ge \varepsilon_2 - \frac{\varepsilon_2}{2} > 0$, $\frac{dV(\bar y(t))}{dt} \le 0$, $t\in[0,t_1] \overset{\text{не возр.}}{\Rightarrow} \perp$. $\Rightarrow \forall \varepsilon_1>0\ \exists\delta>0 : \|y_0\|<\delta \Rightarrow \|y(t,y_0)\|<\varepsilon_1$ ►

Т2 Пусть: 1) на $\Omega$ $\exists V(\bar y)$ – ф. Лен.

2) $\sum\limits_i \frac{\partial V}{\partial y_i} f_i(t,\bar y) \le -W(\bar y)$, $\forall \bar y\in\Omega$, $\forall t\ge 0$

3) $W(\bar y)$ – непр. полож. опр. на $\Omega$ функ.

---

① $\bar y(t) \equiv \bar\theta$, $\bar y(\bar\theta) = \bar\theta$ – асимпт. уст.

◄ $\bar y(t,\bar y_0)$ – огр. в $\varepsilon_1$ окр. $\bar\theta$ реш. и $\frac{dV(\bar y(t))}{dt} \le 0 \Rightarrow V$ огр. и не возр. $\Rightarrow \exists \lim\limits_{t\to+\infty} V(\bar y(t)) = \alpha \ge 0$

Если $\alpha>0 \overset{\wedge}{\Rightarrow} \exists\varepsilon_3 : \|\bar y(t)\| > \varepsilon_3 > 0\ \forall t\ge 0 \overset{\wedge}{\Rightarrow} \exists\beta>0 : W(\bar y) \ge \beta\ \forall t\ge 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow V(\bar y(t)) - V(\bar y(0)) = \frac{dV(\bar y(\xi))}{dt} t \le -W(\bar y(\xi))t \le -\beta t \to -\infty \Rightarrow \perp$ (пол. опр.) ►

---

Б-8 Рассм. автон. систему $\frac{d\bar y(t)}{dt} = \bar f(\bar y)$

Опр $\bar y_0$ – т. покоя, если $\bar f(\bar y_0) = \bar\theta$

$\exists\ \bar y(t) = \hat y(t) + \bar y_0 \Rightarrow \frac{d\hat y(t)}{dt} = \bar F(\hat y(t))$, $\bar F(\hat y) = \bar f(\hat y + \bar y_0) \Rightarrow a_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial y_j}(\bar\theta) = \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(\bar y_0)$

$\Rightarrow$ Т.1 Пусть: 1) $\bar y_0$ – т. покоя автон. сист.

2) $f_i \in C^2(B_\delta(\bar y_0))$

---

① Если $\mathrm{Re}\,\lambda_k<0$ $\left(A = \left(\frac{\partial f_i(\bar y_0)}{\partial y_j}\right)\right) \Rightarrow$ асимпт. уст. по Лен.

② Если $\exists\,\mathrm{Re}\,\lambda_k>0 \Rightarrow$ неуст. по Лен.

$\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$, $\lambda_1\ne\lambda_2$, $\lambda_1\cdot\lambda_2>0$ узел

$\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$, $\lambda_1=\lambda_2\ne 0$, $\dim\ker(A-\lambda I)=2$ дикр. уз.

$=1$ вырожд. узел

$\lambda_2<0<\lambda_1$ седло

$\in\mathbb{C}$, $\delta\pm i\omega$, $\delta\ne 0$, $\omega\ne 0$ фокус

$\pm i\omega$, $\omega\ne 0$ центр

Б.10

Рассм. краев. задачу на $0 \le x \le l$ $L$ —

Опр функция $G(x,\xi)$ наз-ся функ-ей Грина кр. з., если: 1) опр. и непр. на $[0,l]\times[0,l]$

2) непр. дифф. по $x$ на $[0,\xi)\cup(\xi,l]$

3) удовл. $\underset{x\ne\xi}{L}G(x,\xi)=0$ и однор. кр. усл. по $x$ на $\xi\in(0,l)$

4) $\frac{1}{p(\xi)} = G_x(\xi+0,\xi) - G_x(\xi-0,\xi)$, $\xi\in(0,l)$

Т.1 Пусть:

1) одн. кр. з. с одн. кр. условиями имеет единств. трив. решение

---

$\Rightarrow$ ф. Грина кр. з. $\exists$ и !

◀ Определим $y_1(x)$ и $y_2(x)$, как реш. з. Коши: $Ly_1=0$, $y_1(0)=-\alpha_1$, $y_1'(0)=\beta_1$ $\quad 0\le x\le l$

$Ly_2=0$, $y_2(l)=-\alpha_2$, $y_2'(l)=\beta_2$

Ищем $G(x,\xi)=\begin{cases} y_1(x)c_1(\xi), & 0\le x\le\xi \\ y_2(x)c_2(\xi) & \xi\le x\le l\end{cases}$

удовл. кр. усл., 2 непр. дифф. $\overset{\text{осталось}}{\Rightarrow}$ $\begin{cases} c_1(\xi)y_1(\xi)=c_2(\xi)y_2(\xi) \\ \frac{1}{p(\xi)}=c_2(\xi)y_2'(x)-c_1(\xi)y_1'(x)\end{cases}$ $\Rightarrow$ $c_1=\frac{y_2(\xi)}{W(\xi)p(\xi)}$, $c_2=\frac{y_1(\xi)}{W(\xi)p(\xi)}$

Т.к. $W(\xi)\cdot p(\xi)=p_0$ — нуб. const $\Rightarrow$ $G(x,\xi)=\begin{cases}\frac{y_1(x)y_2(\xi)}{p_0}, & 0\le x\le\xi \\ \frac{y_1(\xi)y_2(x)}{p_0}, & \xi\le x\le l\end{cases}$

Единств.: Рассмотрим $z(x,\xi)=G(x,\xi)-\hat{G}(x,\xi)$ при $\xi$ - фиксир.

$\in C^1[0,l]$, т.к. один. одност. пределы

$\underset{z\ne\xi}{Lz=0}$ $\Rightarrow$ $z''=\frac{qz-p'z'}{p}$ - непр $(x\to\xi\pm0)$ $\Rightarrow$ $z(x)$ - реш. кр. з. $\overset{\text{ед.}}{\Rightarrow}$ $z(x)=0$ ▶

---

Б.11

Т.1 Пусть: 1) одн. кр. з. имеет только нул. реш.

---

$\Rightarrow$ у обычной кр. з. $\exists$! реш. $y(x)=\int_0^l G(x,\xi)f(\xi)d\xi$, $0\le x\le l$

◀ $y(x)\overset{\text{Т1}}{=}\frac{y_2(x)}{g_0}\int_0^x y_1(\xi)f(\xi)d\xi+\frac{y_1(x)}{g_0}\int_x^l y_2(\xi)f(\xi)d\xi$ $\Rightarrow$ $y'(x)=\frac{y_2'(x)}{g_0}\int_0^x y_1(\xi)f(\xi)d\xi+\frac{y_1'}{g_0}\int_x^l y_2 f\,d\xi$

$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(p\frac{dy}{dx}\right)=\frac{W(x)p(x)}{g_0}f(x)+\ldots \overset{Ly_1=0=Ly_2}{\Rightarrow} Ly=f(x)$, краев. ус. ...

Единств.: $v(x)=y(x)-\tilde{y}(x)$ - уд. реш. одн. кр. з., ед. ▶

~~Б.11~~ Рассм. кр. задачу: $y''(x)+a^2y = F(x,y)$

$y(0)=y(l)=0$

**Т.1** Пусть:

1) $F(x,y(x))$ — непр. на $[0,l]\times\mathbb{R}$
2) $F$ удовл. усл. Липш. по $y$ на $[0,l]\times\mathbb{R}$
3) $lL(a|\sin al|)^{-1}<1$

---

⟹ Реш. кр. задачи ∃ и !

◄ Ф. Гр. для этой задачи имеет вид $G_a(x,\xi) = \begin{cases}\dfrac{\sin ax \sin a(\xi-l)}{a\sin al}, & 0\le x\le\xi \\ \dfrac{\sin a\xi \sin a(x-l)}{a \sin al}, & \xi\le x\le l\end{cases}$

(ЛНЗ ф. $y_1=\sin ax$, $y_2=\sin a(x-l)$, $\rho_0=a\sin al$)

⟹ $y(x)=\int_0^l G_a(x,\xi)f(\xi)d\xi$ (*)

⟹ если $y(x)$ — реш. кр. зад. ⟹ удовл. (*) $=\int_0^l G_a(x,\xi)F(\xi,y(\xi))d\xi$

Обратно, легко проверить ⟹ экв. кр. з. и инт. ур-ю.

∃. $y_{k+1}(x)=\int_0^l G_a(x,\xi)F(\xi,y_k(\xi))d\xi$, $0\le x\le l$ — опр. и непр. на $[0,l]$

$|y_{k+1}(x)-y_k(x)|\le M\left(\dfrac{lL}{a|\sin al|}\right)^k$, по инд., $|G_a(x,\xi)|\le(a|\sin al|)^{-1}$, $0\le x,\xi\le l$

$M=\max_{0\le x\le l}|y_1(x)|$

Липш. ⟹ ст. д. интегр.

$y_k(x)=\sum_{n=1}^{k}(y_n(x)-y_{n-1}(x))$ — р. сх. экв. р. сх. $\sum_{k=0}^{\infty}(y_{k+1}-y_k)$ — сх. р. по Вейерштр. к непр. пред. $y(x)$

$y(x)$ — реш. (в пределе)

**Единств.** $y_1(x)-y_2(x)=\int_0^l G_a(x,\xi)[F(\xi,y_1(\xi))-F(\xi,y_2(\xi))]d\xi$, $0\le x\le l$

Использ. оценку $|y_1-y_2|<\max_{[0,l]}|y_1-y_2|$ ⟹ ! ►

---

**Б.12** Рассм. кр. з.: $\begin{cases} Ly=-\lambda y \\ \alpha_1 y'(0)+\beta_1 y(0)=0 \\ \alpha_2 y'(l)+\beta_2 y(l)=0\end{cases}$

**Опр.** $y_1(x)\not\equiv 0$ — реш. кр. з. с $\lambda_1$; $y_1$ — собств. ф., $\lambda_1$ — собств. зн.

$c\,y_1(x)$ — тоже с. ф.

**Т1** $y_1(x)$ и $\lambda_1\in\mathbb{R}$ (все с.ф. и зн.)

◄ $\lambda=a+ib$, $y(x)=u(x)+iv(x)$ ⟹ $Lu=-au+bv$, $Lv=-bu-av$; $u, v$ — удов. кр. усл.

$\int_0^l(vLu-uLv)dx=b\int_0^l(u^2+v^2)dx \underset{\text{ин. ф. Гр.}}{=} 0$ ⟹ $b=0$ ⟹ $y_1(x)$ — действ. ►

**Т2** ∀$\lambda$ ∃! собств. ф.

◄ ∃ $\lambda$ с. зн., $y_1(x), y_2(x)$ — реш. и кр. усл. $\alpha_1 y'(0)+y(0)\beta_1=0$ ⟹ $W[y_1,y_2](0)=0$ и т.к. $y_1, y_2$ — реш. одного дифф. ур. ⟹ $y_2=Cy_1$ ►

Т3 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ – с.зн. $\Rightarrow$ $y_1(x), y_2(x)$ – ортог.

◀ $(Ly_1, y_2) - (y_1, Ly_2) = \int_0^l (y_2 Ly_1 - y_1 Ly_2)\,dx = 0 \underset{\uparrow}{\Rightarrow} (\lambda_1 - \lambda_2)(y_1, y_2) = 0 \Rightarrow$ ▶

$Ly_1 = -\lambda_1 y_1$

$Ly_2 = -\lambda_2 y_2$

Т4 Пусть:

1) $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$

2) $\lambda$ – с.зн.

⊕ $\lambda \geq \min\limits_{0 \leq x \leq l} q(x)$

◀ От противного: $q(x) - \lambda_1 > 0$ на $[0, l] \Rightarrow p(x) y_1'(x) = p(0) y_1'(0) + \int_0^x (q(s) - \lambda)\, y_1(s)\,ds$ $*$

1) $\Rightarrow y_1(0) = y_1(l) = 0$, т.к. $y_1(x) \neq 0 \Rightarrow y_1'(0) \neq 0$ $\exists\, y_1'(0) > 0 \Rightarrow y_1'(x) > 0$, $x \in [0, l]$.

От прот. $\exists x_0 = \min : y_1'(x_0) = 0 \Rightarrow y_1(x) > 0$, $x \in (0, x_0)$. Тогда $(*) \underset{x = x_0}{\Rightarrow} y_1'(x_0) > 0 \Rightarrow \perp$

$\Rightarrow y_1(x) > 0$, $x \in (0, l] \underset{\text{противор.}}{\Rightarrow} \perp$ ▶

Т Стеклова Норм. с.ф. $\int_0^l y_n^2(x)\,dx = 1$, $f(x) \in C[0,l]$, $f_n = \int_0^l f y_n\,dx$

1) $f(x) \in C^2[0,l]$
2) уд. кр. усл.
$\Rightarrow \sum f_n y_n(x)$ сх. к $f(x)$ р. на $[0, l]$.

---

Б13 Рассм. норм. сист. $\frac{d\bar{x}(t)}{dt} = \bar{f}(t, \bar{x}(t))$ – непр. в $D_1 \in \mathbb{R}^{n+1}$ $(*)$
$C^1(D_1)$ обл.

Опр $v(t, \bar{x})$ – пер. интегр. сист. $(*)$ в обл. $D_1$, если
1) $\in C^1(D_1)$
2) $\forall\, \bar{x}(t)$ – реш. $v(t, \bar{x}(t)) = \underset{\text{const}}{C}$

Опр Произв-е $v(t, \bar{x}(t))$ в силу сист. $*$, если
1) $\in C^1(D_1)$
2) $\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(*)} = \frac{\partial v(t,\bar{x})}{\partial t} + \sum\limits_j \frac{\partial v(t,\bar{x})}{\partial x_j} f_j(t, \bar{x})$
$(t, \bar{x}) \in D_1$

Л.1 Пусть:

1) $v(t, \bar{x}) \in C^1(D_1)$

⊕ $v(t, \bar{x})$ – ПИ сист. $*$ на $D_1 \Leftrightarrow$ её произв. в силу сист. $\equiv 0$ в $D_1$

◀ $(\Rightarrow)$ $0$ = произв. в силу сист. на инт. кривой, но через $\forall t$. в $D_1$ проходит единств. инт. кривая $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Т. } \exists\text{и!} \text{ реш. з.К.}}}{\Rightarrow}$ ч.т.д.

$(\Leftarrow)$ $\frac{d}{dt}(v(t, \bar{x})) = 0$ на инт. крив. $\Rightarrow v(t, \bar{x}) = C$ ▶

Суперпозиция непр.-диф. в $\mathbb{R}^n$ ф. и $n$ пер. инт. $=$ перв. инт.

Опр – ПИ $v_1 \ldots v_k$ ф. нез. в $D_1$, если
1) $\operatorname{rang}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) = k$ $\forall (t, \bar{x}) \in D_1$

Т1 Пусть:

1) в $D_1$ $\exists n$ функ. нез. ПИ сист.

⊕ $\forall (t_0, \bar{x}_0) \in D_1$, $\bar{x}(t)$ – реш. з. $(*)$ К. ⊕ $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$ одн. опр. неявная ф. из сист. ур.

$\begin{cases} v_1(t, \bar{x}) = c_1^0, \\ \ldots \\ v_n(t, \bar{x}) = c_n^0 \end{cases}$ $c_j^0 = v_j(t_0, \bar{x}_0)$

◄ В т. $(t_0, \bar{x}_0)$ – сист. удовл., $\det\left(\frac{\partial v_i(t_0,\bar{x}_0)}{\partial x_j}\right) \neq 0$ $\overset{\text{т. о неяв. ф.}}{\Rightarrow}$ $\exists x_j(t) = g_j(t, \bar{c}_i^0)$ др. сист.

ранг $= n$

$\exists x(t)$ – реш. той же сист $\underset{\text{ед-ть т. анализ}}{\Rightarrow}$ $x(t) \equiv g(t)$ ►

---

ДУ в ч. пр. 1 пор. $F(\bar{x}, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots) = 0$

Б14 Рассм. лин. одн. диф. ур. в ч. пр. 1 пор.

Опр $\sum_{j=1}^{n} a_j(x) \cdot \frac{\partial u(\bar{x})}{\partial x_j} = 0$, $a_j(x)$ задан на $D_0 \subset \mathbb{R}^n$ и $\forall \bar{x} \in D_0$ $\sum_{j=1}^{n} a_j^2(x) \neq 0$

квазил. $\sum_i a_i(\bar{x}, u(\bar{x})) \frac{\partial u(\bar{x})}{\partial x_i} = b(\bar{x}, u)$

лин одн $\sum_i a_i(x) \frac{\partial u(\bar{x})}{\partial x_i} = 0$

Рассм. $\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{a}(\bar{x})$ (*)

Опр Решения (*) – характ-ти ур. в частн. произв. выше

Л1 Пусть! 1) $u(\bar{x}) \in C^1(D_0)$

① $u$ – реш. лин. одн. ... $\Leftrightarrow$ $u$ – не зав. $t$ ПИ сист. $\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{a}(\bar{x})$ в $D_0$

$u(\bar{x})$ – реш. квазил. в $D_0$
1) $u(x) \in C^1(D_0)$
2) $\forall \bar{x} \in D_0$, $(\bar{x}, u(\bar{x})) \in D$
3) лин тожд.

◄ $(\Leftarrow)$ $\overset{\text{св-во}}{\Rightarrow}$ $\frac{du}{dt}\Big|_{(*)} = 0$ $\forall \bar{x} \in D_0 \Rightarrow$ реш.

$(\Rightarrow)$ левая часть – произв. в силу сист. (*) $\overset{\text{л.}}{\Rightarrow}$ это ПИ ►

Т1 Пусть! 1) (*) имеет ровно $n-1$ нез. не зав. $t$ ПИ $v_1, \dots, v_{n-1}$

① $\forall M_0 \in D_0$ общее реш. лин. одн. имеет вид $F(v_1(\bar{x}), \dots, v_{n-1}(\bar{x}))$, $F \in C^1(\mathbb{R}^{n-1})$

◄ По св-ву $F$ – ПИ $\overset{\text{л.}}{\Rightarrow}$ реш. лин. однор. $\exists u(x)$ – друг. реш. $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \sum a_i(\bar{x}) \frac{\partial u(\bar{x})}{\partial x_i} = 0 \\ \sum a_i \frac{\partial v_1(\bar{x})}{\partial x_i} = 0 \\ \dots \\ \sum a_i \frac{\partial v_{n-1}(\bar{x})}{\partial x_i} = 0 \end{cases}$$

имеет нетрив. реш. $a_1, \dots, a_n$ $\overset{\sum a_i^2 \neq 0}{\Rightarrow}$ $\frac{D(u, v_1, \dots, v_{n-1})}{D(x_1, \dots, x_n)} = 0$

Учитывая, что $v_1 \dots v_{n-1}$ нез. $\Rightarrow$ лин. мин. $n-1$ соотв. $\neq 0$

$\overset{\text{т. о функц.}}{\Rightarrow}$ в окр. $M_0$ $\exists F(v_1, \dots, v_{n-1}) = u(\bar{x})$. ►

---

Б. 15 Рассм. $a_1(\bar{x}, u(\bar{x})) \frac{\partial u}{\partial x_1} + a_n(\bar{x}, u(\bar{x})) \frac{\partial u}{\partial x_n} = b(\bar{x}, u(\bar{x}))$

New

New

$b, a_i \in C^1(D)$

$\sum_i a_i^2(\bar{x}, u) \neq 0$ $\forall (\bar{x}, u) \in D \subset \mathbb{R}^n$

квазил. ур-ие в ч. пр. 1 пор. в $D$

Рассм $\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{a}(\bar{x}, u) \\ \frac{du}{dt} = b(\bar{x}, u) \end{cases}$ (*) реш. $(\bar{x}, u)$ этой сист. наз-ся характ. ур-я в ч. пр.

$\Downarrow$

**T1** Пусть!

1) $v(\bar x, u)$ – не сод. $t$ ПИ сист. (*) в $D$

2) $v(N_0)=C_0$, $\frac{\partial v(N_0)}{\partial u}\neq 0$, $N_0\in D$

---

① в некот. окр. $N_0$ $v(\bar x,u)=C_0$ опред. неявную ф. $u=u(\bar x)$, явл-ся реш. квазил. УЧП

◄ ^ ⇒ $\frac{dv}{dt}\Big|_{(*)} = \sum \frac{\partial v}{\partial x_i} a_i + \frac{\partial v}{\partial u} b = 0$ $\forall (\bar x,u)\in D$, в силу условий в нек. окр. $N_0$ ∃ $u(x_1,\dots,x_n)\in C^1$ в этой окр.: $v(\bar x,u(\bar x))\equiv C_0$ ⇒ $\frac{\partial v}{\partial x_i}+\frac{\partial v}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x_i}=0$

⇒ подст. в произв. в силу сист. и $1/(\partial v/\partial u)\neq 0$ ⇒ $u(\bar x)$ – реш. УЧП в нек. окр. $N_0$

Общее решение: согласно теореме о ПИ авт. системы в окр. $N_0\in D$ ∃ ровно $n$ несод. $t$ функ. нез. ПИ $v_1(\bar x,u),\dots,v_n(\bar x,u)$ ⇒ $w(\bar x,u)=F(v_1,\dots,v_n)$ – ПИ

Если $\frac{\partial w}{\partial u}\neq 0$ ⇒ $u(\bar x)$, полученная из $F(v_1(\bar x,u),\dots,v_n(\bar x,u))=0$ – тоже реш. Можно показать, что это ур-ие задаёт общее решение.

**T2** Пусть

1) $u=f(\bar x)\in C^1(D_0)$

---

① $u$ – реш. кваз. ур. в г-ре ⟺ задаваемая этой функ-ей пов. целиком состоит из характер. сист. *

◄ (⇐) $\vec\tau = \left(\frac{dx_1(t)}{dt},\dots,\frac{dx_n(t)}{dt},\frac{du(t)}{dt}\right) = (a_1,\dots,a_n(\bar x,u), b(\bar x,u))$, $u=f(\bar x(t))$

Т.к. $\bar n = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar x(t)),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar x(t)),-1\right)\perp\vec\tau$ ⇒ $a_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar x)+\dots+a_n\frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar x)-b(\bar x,u)=0$ $\forall(\bar x,u)\in\Gamma$

Т.к. через каждую т. поверх. проходит хар. ⇒ ч.т.д.

(⇒) ∃ $N_0(x_1^0,\dots,x_n^0,u^0)\in P$, у хар. $\Gamma(x_1^0,\dots,x_n^0,u^0)$, расм. з.К. $\begin{cases}\frac{d\bar x}{dt}=\bar a(\bar x,f(\bar x))\\ \bar x(t_0)=x_0\end{cases}$

∃! реш. ⇒ $\Gamma=\{x_1=x_1(t),\dots,x_n=x_n(t),u(t)=f(\bar x(t))\}$,

по постр. $\Gamma\subset P$, явл-ся ли характ.! посл. и ур-ий выполнено ↑.

$\frac{du}{dt}=\sum_j\frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar x(t))\cdot\frac{dx_j}{dt}(t) = \sum_j \frac{\partial f(\bar x(t))}{\partial x_j}a_j(\bar x,u) \underset{\text{реш. квас.}}{=} b(\bar x,u)$ ►

Б.16 Опр <u>Функционал</u> - отображение $M \to \mathbb{R}$
$\quad\ \ \cap\ C[a,b]$

Примеры: 1) $M = C[x_0, x_1]$ $\quad$ 3) $M = C^1[a,b]$

$\Phi[y(x)] = y(x_0) + 2y(x_1)$ $\quad$ $y(a) = y_0$,

$y(b) = y_1$

2) $\Phi[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} y(x)\,dx$ $\quad$ $\Phi[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (y(x) + 2(y'(x))^2)\,dx$

Опр <u>Допуст. вариац.</u> $y_0(x) \in M$ - $\forall\, \delta y(x): y_0 + \delta y(x) \in M$

Будем считать, что $t\delta y(x)$ тоже доп. вар. $y_0$, если $\delta y(x)$ - Доп. вар.

Опр <u>Вариац.</u> $\delta\Phi[y_0(x), \delta y(x)]$ <u>функционала</u> $\underline{\Phi[y(x)]}$ на $y_0(x) \in M$ $\frac{d}{dt}\Phi[y_0(x) + t\delta y(x)]\Big|_{t=0}$

Она может $\exists$ и $\nexists$, $M = C[x_0, x_1]$, $\Phi[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{(y(x))^2}\,dx$

$= \int_{x_0}^{x_1} |y(x)|\,dx$

Опр <u>Фун-ал $\Phi[y(x)]$ - достигает</u> на $y_0(x) \in M$ глоб. min, max на $M$, если $\forall y(x) \in M$:

$\Phi[y_0(x)] \le \Phi[y(x)]$ $(\ge)$

Опр ——— " ——— $\quad$ лок. min, max на $M$, если $\exists \varepsilon > 0$:

$\forall y(x) \in M: \|y(x) - y_0(x)\| < \varepsilon \Rightarrow \Phi[y_0(x)] \le \Phi[y(x)]$
$(\ge)$

T1 Пусть:

1) $\Phi[y(x)]$ достигает на $y_0(x) \in M$ лок. max или min на $M$

2) $\delta\Phi[y_0(x), \delta y(x)]\ \exists$

---

$\Rightarrow$ $\delta\Phi[y_0(x), \delta y(x)] = 0$ $\forall$ допуст. вар. $\delta y(x)$

◀ ] $\Phi[y(x)]$ дост. лок. экстр. $\varphi(t) = \Phi[\underset{\text{фикс.}}{y_0(x)} + t\underset{\text{фикс.}}{\delta y(x)}]$ $\quad$ 1) $\Rightarrow t=0$ у $\varphi$ лок. экстр.

2) если $\exists \varphi'(0) \Rightarrow \varphi'(0) = 0$

Она $\exists$, т.к. $\frac{d}{dt}\varphi(t)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\Phi[y_0(x) + t\delta y(x)]\Big|_{t=0}$ $\quad$ 2) $\delta\Phi[y_0(x), \delta y(x)] = 0$ $\forall \delta y(x)$ ▶

Б17 $^{\text{Л1}}$ Пусть!

1) $C_0^n[x_0,x_1] = \{y(x) \in C^n[x_0,x_1] \mid y^{(m)}(x_0) = y^{(m)}(x_1) = 0,\ m = \overline{0,n-1}\}$
2) $f(x) \in C[x_0,x_1]$
3) $\int_{x_0}^{x_1} f(x)y(x)dx = 0,\ \forall y(x) \in C_0^n[x_0,x_1]$

---

Ⓣ $f(x) \equiv 0$ на $[x_0,x_1]$

◀ (от прот.) $\exists f(x) \not\equiv 0$ на $[x_0,x_1]$, $f(x_2) \neq 0$, $x_2 \in (x_0,x_1)$. $\exists f(x_2) > 0 \underset{\text{непр.}}{\Rightarrow} \exists \varepsilon > 0:\ f(x) \geq \frac{f(x_2)}{2} > 0$
$\forall x \in [x_2-\varepsilon, x_2+\varepsilon] \subset (x_0,x_1)$

$$\exists y_*(x) = \begin{cases} (x-(x_2-\varepsilon))^{n+1}((x_2+\varepsilon)-x)^{n+1}, & x \in [x_2-\varepsilon, x_2+\varepsilon] \\ 0, & x \notin [x_2-\varepsilon, x_2+\varepsilon] \end{cases}$$

$C_0^n[x_0,x_1]$ и $> 0$ при $x \in (x_2-\varepsilon, x_2+\varepsilon)$ $\Rightarrow \int_{x_0}^{x_1} f(x)y_*(x)dx = \int_{x_2-\varepsilon}^{x_2+\varepsilon} f(x)y(x)dx > 0 \Rightarrow \perp$ ▶

$\exists M = \{y(x) \in C^1[x_0,x_1] \mid y(x_0) = y_0,\ y(x_1) = y_1\}$,

$\Phi[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x,y(x),y'(x))dx \quad (*)$

T.1 Пусть:

1) $\exists$ непр. втор. частн. произв. у $F(x,y,p)$ на $[x_0,x_1] \times \underset{\in \mathbb{R}^2}{(y,p)}$
2) $(*)$ достигает лок. экстр. на $y_0(x) \in M$
3) $y_0''(x) \in C([x_0,x_1])$

---

Ⓣ $y_0(x)$ – реш. ДУ $F_y(x,y,y') - \frac{d}{dx}F_p(x,y,y') = 0$, $x \in [x_0,x_1]$.

◀ Из опр. допуст. вариац. $\Rightarrow \delta y \in C_0^1[x_0,x_1]$. $\delta\Phi[y_0(x), \delta y(x)] = \frac{d}{dt}\int_{x_0}^{x_1} F(x, y_0 + t\delta y(x), y_0'(x) + t(\delta y)'(x))dx \Big|_{t=0}$
$= \int_{x_0}^{x_1}\{F_y(x,y_0,y_0')\delta y + F_p(x,y_0,y_0')(\delta y)'\}dx = 0 \xRightarrow{\text{по частям + граничн.}} \int_{x_0}^{x_1}\{F_y(x,y_0,y_0') - \frac{d}{dx}F_p(x,y_0,y_0')\}\delta y\, dx = 0$

$\xRightarrow{\text{осн. л.}} F_y - \frac{d}{dx}F_p = 0,\ x \in [x_0,x_1]$ ▶

5.16 $\rfloor M = \{y(x) \in C^{n}[x_0,x_1] \mid \begin{bmatrix} y(x) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x) \end{bmatrix} \Bigg|_{x_0,x_1} = \bar{y}_0, \bar{y}_1$ соотв-но $\}$

$\Phi[y(x)] = \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y, \dots, y^{(n)})\,dx \quad (*)$, $F \in C([x_0,x_1] \times \mathbb{R}^{n+1})$

**Т1** Пусть:

1) $\exists$ непр. произв. частн. порядка $2n$ у $F$ на $[x_0,x_1] \times \mathbb{R}^{n+1}$ $(F = F(x, y(x), \dots, y^{(n)}(x)))$
2) $y_0(x) \in M$, $C^{2n}[x_0,x_1]$
3) на $y_0(x)$ дост. экстрем. функ-а $(*)$ на $M$

---

① $y_0(x)$ - реш. $F_y - \frac{d}{dx} F_{p_1} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{p_n} = 0, \quad x \in [x_0,x_1]$

◄ $\delta\Phi[y_0(x), \delta y(x)] = \frac{d}{dt} \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y_0(x) + t\delta y(x), y_0^{(n)}(x) + t(\delta y)^{(n)}(x))\,dx \Big|_{t=0} = 0$ — необ. усл. экстр.

$\Rightarrow \int\limits_{x_0}^{x_1} F_y \delta y(x) + F_{p_1} (\delta y)'(x) + \dots + F_{p_n} (\delta y)^{(n)}(x))\,dx = 0$ — дифф. $\int$ по $t$ и положим $t=0$

$\Rightarrow$ (инт. по частям + краев. усл. $(\delta y(x))^{(k)}|_{x_0,x_1} = 0$) $\int\limits_{x_0}^{x_1} (F_y - \frac{d}{dx} F_{p_1} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{p_n}) \delta y(x)\,dx = 0 \overset{\text{О.Л. вар. исч.}}{\Rightarrow}$ ч.т.д. ($\forall \delta y \in C_0^n[x_0,x_1]$) ►

$\rfloor \Phi[u(x,y)] = \iint\limits_D F(x, y, u(x,y), u_x(x,y), u_y(x,y))\,dx\,dy \quad (**)$ $\partial D = L$
$D$ - область, ограниченная контуром $D$

$\rfloor \exists$ непр. 2-ые частные произв. у $F$ на $\bar{D} \times \mathbb{R}^3$

$\rfloor M = \{u(x,y) \mid \exists$ непр. частн. произв. в $\bar{D}$ и $u(x,y) = \varphi(x,y); (x,y) \in L\}$ $\Rightarrow \delta u(x,y)$ имеет непр. 2-ые в $\bar{D}$ и $=0$ на $L$.

**Л1** Пусть:

1) $f(x,y) \in C(\bar{D})$
2) $\iint\limits_D f(x,y) v(x,y)\,dx\,dy = 0 \quad \forall v(x,y)$: $\exists$ непр. частн. произв. в $\bar{D}$ и $=0$ на $L$

---

① $f(x,y) = 0$, $(x,y) \in \bar{D}$

◄ (От противного)! $\exists (x_0,y_0) \in D$: $f(x_0,y_0) \neq 0$. $\rfloor f(x_0,y_0) > 0 \overset{\text{непр.}}{\Rightarrow} \exists B_\varepsilon((x_0,y_0))$ - круг:
$f(x,y) > \frac{f(x_0,y_0)}{2} > 0$, $(x,y) \in B_\varepsilon \subset \bar{D}$. $\rfloor v_0(x,y) = \begin{cases} ((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 - \varepsilon^2)^2, & (x,y) \in S \\ 0, & (x,y) \in \bar{D} \setminus S \end{cases}$

$\Rightarrow \iint\limits_D f(x,y) v_0(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_S f v_0\,dx\,dy \geq \frac{f_0}{2} \iint\limits_S v_0\,dx\,dy > 0 \Rightarrow \perp$ ►

↓

T2 Пусть:

1) $F = F(x, y, u, p, q)$

2) у $F$ $\exists$ непр. 2-ого частн. произв. в $\bar{D} \times \mathbb{R}^3$

3) экстремали (**) дост. на $u_0(x,y) \in M$

4) у $u_0(x,y)$ $\exists$ 2-ые непр. частн. произв. в $\bar{D}$

---

$\Rightarrow$ $u_0(x,y)$ – реш. $F_u - \frac{\partial F_p}{\partial x} - \frac{\partial F_q}{\partial y} = 0$, $(x,y) \in D$

◀ необ. усл. экстр. $\Rightarrow$ $\delta\Phi[u_0(x,y), \delta u(x,y)] = 0$ $\Rightarrow$ $\frac{d}{dt} \iint\limits_D F(x, y, u_0(x,y) + t\delta u(x,y)), u_{0x}' + t(\delta u)_x', u_{0y}' + t(\delta u)_y') \, dx\, dy \Big|_{t=0}$

$\Rightarrow$ (дифф. по $t$ и полагаем $t=0$) $\iint\limits_D F_u(x, y, u_0, u_{0x}', u_{0y}') \delta u \, dx\, dy + \iint\limits_D \{ \underbrace{F_p(x, y, u_0, u_{0x}', u_{0y}') (\delta u)_x}_{\frac{\partial}{\partial x}(F_p' \delta u) - \frac{\partial F_p}{\partial x} \delta u} + \underbrace{F_q(x, y, u_0, u_{0x}', u_{0y}') (\delta u)_y}_{\frac{\partial}{\partial y}(F_q' \delta u) - \frac{\partial F_q}{\partial y} \cdot \delta u} \} dx\, dy = 0$

$$\underbrace{\iint\limits_D \left( \frac{\partial}{\partial x}(F_p' \delta u) + \frac{\partial}{\partial y}(F_q' \delta u) \right) dx\, dy}_{= \oint\limits_{\Gamma} (F_p' \delta u \, dy - F_q' \delta u \, dx) \,=\, 0 \text{ – ф. Грина + краев. усл.}} + \iint\limits_D \left( \frac{\partial F_p'}{\partial x} + \frac{\partial F_q'}{\partial y} \right) \delta u \, dx\, dy$$

$\Rightarrow$ (по Лемме 1, $\forall \delta u(x,y)$ – допустимая вариац.) $F_u - \frac{\partial}{\partial x} F_p - \frac{\partial}{\partial y} F_q = 0$ ▶

Б. 19 $\exists\ \Phi[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))dx$, $\Psi[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} G(x, y(x), y'(x))dx$, $F, \Psi$ – 2-н непр. дифф. по своим аргум.

$M_\Psi = \{y(x) \in C^1[x_0, x_1] : y(x_0) = y_0,\ y(x_1) = y_1,\ \Psi[y(x)] = \ell\}$

$M = \{y(x) \in C^1[x_0, x_1] : y(x_0) = y_0,\ y(x_1) = y_1\}$

Вариац. задача на усл. экстр.: найти $\bar y(x)$ на которой достиг. экстр. $\Phi[y(x)]$ на $M_\Psi$.

Вариац. $\Psi[y(x)]$ на $y(x) \in M$ $= \frac{d}{dt}\Psi[y(x) + t\delta y(x)]\Big|_{t=0} = \int_{x_0}^{x_1}\{G_y(x, y, y')\delta y + G_p(x, y, y')(\delta y)'\}dx$

Т. 1 Пусть:

1) $\bar y(x) \in M_\Psi$, $C^2[x_0, x_1]$

2) на $\bar y$ дост. экстр $\Phi$ на $M_\Psi$

3) $\exists \delta y_0 \in C^1[x_0, x_1] : \delta y_0(x_0) = \delta y_0(x_1) = 0$ и $\delta\Psi[\bar y(x), \delta y_0] \neq 0$

---

① $\exists \lambda = const$ : $\bar y(x)$ – реш. $L_y(x, y(x), y'(x)) - \frac{d}{dx}L_p(x, y(x), y'(x)) = 0$, $x \in [x_0, x_1]$, $L(x, y, p) = F + \lambda G$

◄ $\exists \delta y(x) : \delta y \in C^1[x_0, x_1]$, $\delta y(x_0) = \delta y(x_1) = 0$,

$\varphi(t, \tau) = \Phi[\bar y(x) + t\delta y(x) + \tau\delta y_0(x)]$, $t, \tau \in \mathbb{R}$

$\psi(t, \tau) = \Psi[\bar y(x) + t\delta y(x) + \tau\delta y_0(x)]$

$\Rightarrow$ $\varphi(0,0) = \Phi[\bar y(x)]$, $\psi(0,0) = \Psi[\bar y(x)]$

$\varphi'_t(0,0) = \delta\Phi[\bar y(x), \delta y(x)]$, $\varphi'_\tau = \delta\Phi[\bar y(x), \delta y_0(x)]$

$\psi'_t(0,0) = \delta\Psi[\bar y(x), \delta y(x)]$, $\psi'_\tau(0,0) = \delta\Psi[\bar y(x), \delta y_0(x)]$

Убе. $\forall\ \delta y(x) \in C^1_0[x_0, x_1]$

$$\left|\begin{matrix} \frac{\partial\varphi}{\partial t} & \frac{\partial\varphi}{\partial\tau} \\ \frac{\partial\psi}{\partial t} & \frac{\partial\psi}{\partial\tau} \end{matrix}\right|\Bigg|_{t=\tau=0} = \left|\begin{matrix} \delta\Phi[\bar y(x), \delta y(x)] & \delta\Phi[\bar y(x), \delta y_0(x)] \\ \delta\Psi[\bar y(x), \delta y(x)] & \delta\Psi[\bar y(x), \delta y_0(x)] \end{matrix}\right| = 0$$

◄ $\exists \neq 0 \Rightarrow \exists \delta y(x) = \delta\bar y(x) : |\ | \neq 0 \underset{\text{Т. о неявн. ф.}}{\Rightarrow} \begin{cases}\varphi(t,\tau) = u \\ \psi(t,\tau) = v\end{cases}$ разр. для $(u, v)$ в мало $\varepsilon$ окр. $(\varphi(0,0), \psi(0,0))$

$\exists$ на $\bar y(x)$ дост. лок. min $\Rightarrow$ для сист. $\begin{cases}\varphi = \varphi(0,0) - \varepsilon = \Phi[\bar y(x)] - \varepsilon \\ \psi = \psi(0,0) = \Psi[\bar y(x)] = \ell\end{cases}$ и нач. точки $(\varphi(0,0) - \varepsilon, \psi(0,0))$

т. о неявн. ф.

$\Rightarrow \exists!\ t_\varepsilon, \tau_\varepsilon : \begin{matrix}\varphi(t_\varepsilon, \tau_\varepsilon) = \Phi[\bar y(x)] - \varepsilon \\ \psi(t_\varepsilon, \tau_\varepsilon) = \ell\end{matrix}$ $\Rightarrow \bar y(x) + t_\varepsilon\delta\bar y(x) + \tau_\varepsilon\delta y_0(x) \in M_\Psi$, но на этой ф. зн. < лок. min $\bar y(x)$ $\Rightarrow \bot$ ►

$\Rightarrow \delta\Phi[\bar y(x), \delta y(x)] + \lambda\delta\Psi[\bar y(x), \delta y(x)] = 0$, $\lambda = -\frac{\delta\Phi[\bar y(x), \delta y_0(x)]}{\delta\Psi[\bar y(x), \delta y_0(x)]}$, $\neq 0$ по усл.

$\Leftrightarrow \int_{x_0}^{x_1}[F'_y(x, \bar y, \bar y') + \lambda G'_y(x, \bar y, \bar y')]\delta y\,dx + \underbrace{\int_{x_0}^{x_1}[F'_p(x, \bar y, \bar y') + \lambda G_p(x, \bar y, \bar y')](\delta y)'dx}_{\text{по частям + гр. усл.} = \int_{x_0}^{x_1} -\frac{d}{dx}L_p(x, \bar y, \bar y')\delta y\,dx} = 0$

$\Rightarrow \int_{x_0}^{x}[L_y(x, \bar y, \bar y') - \frac{d}{dx}L_p(x, \bar y, \bar y')]\delta y(x)dx = 0 \underset{\text{осн. лемма вар.}}{\Rightarrow}$ ч.т.д. ►

Б.20 Рассм. задачу Штурма-Лиувилля.

Необход. найти $\lambda$ : (*) $\begin{cases} \frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{dy}{dx}\right) - q(x)y = -\lambda y & 0 \le x \le l \\ y(0) = 0 = y(l) \;(**) \end{cases}$ имеет $\neq 0$ реш.

Т.е. $y_n(x)$ - реш. ↗ при $\lambda_n$ наз-ся собств. ф. и собств. зн. соотв.

$\exists \underbrace{\int_0^l y_n^2(x)\,dx = 1}_{\text{нормировка (***)}}$ , $\Phi[y(x)] = \int_0^l (k(x)(y'(x))^2 + q(x)y^2(x))dx$

Утв. Пусть 1) $y_n(x)$ - собств. ф. (*)

① $\Phi[y_n(x)] = \lambda_n$ - соотв. собств. зн.

◄ $\Phi[y_n(x)] = \int_0^l (k(y_n')^2 + qy^2)dx$ , $\int_0^l k(y_n')^2dx = ky_n'y_n\Big|_{0}^{x=l} - \int_0^l (ky_n')'y_n\,dx \Rightarrow$

$\Rightarrow \Phi[y_n(x)] = -\int_0^l ((ky_n')' - qy_n)y_n\,dx = \lambda_n \int_0^l y_n^2dx = \lambda_n$ ►

Рассм. min $\Phi[y(x)]$ на $\{y(x)$ : (***) и (**)$\}$ , (***) $\Leftrightarrow \Psi[y(x)] = 1$ , где $\Psi[y(x)] = \int_0^l y^2(x)dx$

$\exists$ min дости. на $\bar{y}(x) \in C^2[0,l] \underset{\substack{\text{необ. усл.} \\ \text{экстр. реш.} \\ \exists \text{ не усл. экстр}}}{\Rightarrow} \bar{y}(x)$ - реш. $L_y - \frac{d}{dx}L_p = 0$ , $0 \le x \le l$, $L = L(x,y,p) =$
$= k(x)p^2 - q(x)y^2 - \lambda y^2$.

$\Rightarrow 2qy + 2\lambda y - 2(ky')' = 0$, $0 \le x \le l$ $\Rightarrow \bar{y}$ - реш. (*) и $\neq 0$ благодаря (***) $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ она собств. ф. (*) $\Rightarrow \Phi[\bar{y}(x)] = \lambda_{\bar{y}(x)}$ .